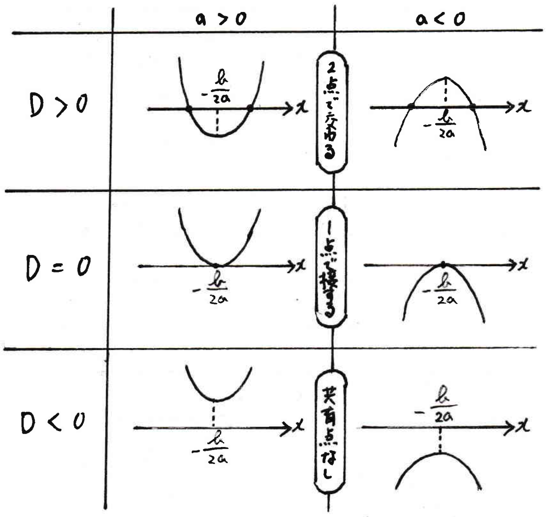
〈2次関数のグラフと2次方程式の解〉

$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ の右辺を平方完成すると、

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$ より

$y=ax^2+bx+c$ のグラフは、$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ を頂点とする放物線である。よって、$\boxed{D=b^2-4ac}$ とすると、

放物線とx軸の位置関係は、右図のようにDの符号によって変わる。



$ax^2+bx+c=0$ の実数解は、放物線とx軸の共有点のx座標だから、次のようになる。

$D>0$	$\Leftrightarrow$	異なる2つの実数解
$D=0$	$\Leftrightarrow$	ただ1つの実数解(重解)をもつ
$D<0$	$\Leftrightarrow$	実数解をもたない

このように、Dの符号で実数解の個数を判別できるため、$D(=b^2-4ac)$を判別式という。

(discriminant) ← discriminate 区別する

$ax^2+bx+c=0$ を解くと、

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \qquad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \therefore\ \boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$ [解の公式]

2解をα,βとすると、$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta=0$

$\therefore\ \boxed{\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}}$ [解と係数の関係]

符号に注意!

↳ 数学IIで学ぶ

(補足) $b=2b'$のとき、$D=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$ より $\frac{D}{4}=b'^2-ac$ となるから、b'^2-acの符号で実数解の個数を判別できる。また、解の公式より、$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ となる。bが偶数のときは、bを2で割った値をb'とし、$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ として解く方が速い。