〈放物線と接線が囲む面積〉

$\boxed{\int (x-\alpha)^2 dx = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + C}$ ［$\frac{1}{3}$公式］

(例) aを正の実数、bとcを実数とし、2点P$(-1,3)$, Q$(1,4)$を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ をCとする。

また、P, QにおけるCの接線をそれぞれl_1, l_2とする。Cとl_1, l_2で囲まれる図形の面積をaで表せ。

(2011年 北大・改)

CがP, Qを通るから、$3=a-b+c$ —① $4=a+b+c$ —②

①,②より、$1=2b$ $b=\frac{1}{2}$ —③ ②,③より、$c=4-a-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}-a$

よってCの方程式は $y=ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-a$ であり、$y'=2ax+\frac{1}{2}$ だから、

l_1の方程式は、$y=(-2a+\frac{1}{2})(x+1)+3$ すなわち $y=(-2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}$ —④

l_2の方程式は、$y=(2a+\frac{1}{2})(x-1)+4$ すなわち $y=(2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}$ —⑤

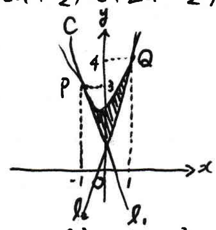
④,⑤より、l_1とl_2の交点のx座標は、$(2a+\frac{1}{2})x-2a+\frac{7}{2}=(-2a+\frac{1}{2})-2a+\frac{7}{2}$ $4ax=0$

$a\neq 0$より、$x=0$ よって、求める面積は、

$$\int_{-1}^{0}\left\{ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-a-(-2a+\frac{1}{2})x+2a-\frac{7}{2}\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{ax^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-a-(2a+\frac{1}{2})x+2a-\frac{7}{2}\right\}dx$$

$$=a\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+a\int_{0}^{1}(x-1)^2dx=a\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+a\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a=\frac{2}{3}a$$



(補足) $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$上の点$(\alpha, a\alpha^2+b\alpha+c)$における接線 $y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c$ と

点$(\beta, a\beta^2+b\beta+c)$ $(\alpha<\beta)$における接線 $y=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$ の交点のx座標は、

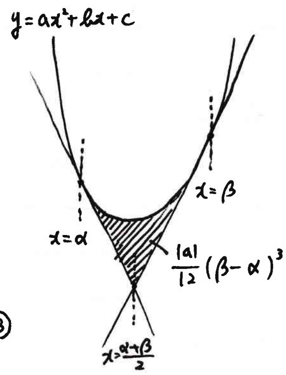
$(2a\alpha+b)x-a\alpha^2+c=(2a\beta+b)x-a\beta^2+c$ より、$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ —Ⓐ

よって、放物線と2接線が囲む面積は、

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}a(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}a(x-\beta)^2dx=a\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+a\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{a}{24}(\beta-\alpha)^3+\frac{a}{24}(\beta-\alpha)^3=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3$$

$a<0$のときは $\frac{-a}{12}(\beta-\alpha)^3$となり、$a$の符号によらず、$\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$ —Ⓑ



Ⓐ,Ⓑを覚えておき、検算に使えるようにしたい。